CONJUNTOS COMPACTOS

Miguel Ángel García Álvarez

1. Teorema de Heine-Borel

En el año 1895, Émile Borel encontró una propiedad de los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$, la cual generó un concepto muy importante en el Análisis Matemático, el de conjunto compacto.

Borel estaba atacando un problema de continuación analítica de una función de variable compleja y, como parte de su razonamiento, demostró un resultado, el cual, simplificado para el caso de un intervalo $[a, b]$ de números reales, se puede enunciar como sigue:

Si $I_1, I_2, \ldots$ es una familia infinita numerable de intervalos abiertos tales que la suma de sus longitudes es menor que la longitud del intervalo $[a, b]$, entonces la unión de todos los intervalos I_n no cubre al intervalo $[a, b]$.

Para probar lo anterior, Borel demostró que si la unión de los intervalos I_n cubriera al intervalo $[a, b]$, entonces existiría un subcolección finita $I_{n_1}, I_{n2}, \ldots, I_{n_m}$, de esos intervalos, cuya unión cubriría a $[a, b]$ y entonces se tendría:

$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{k=1}^{m} l\left(I_{n_k}\right) \geq b - a.$

La existencia de una colección finita de intervalos que cubren a $[a, b]$, partiendo de que la unión de la colección infinita lo cubre, lo demostró Borel de la siguiente manera:

Sea:

$A = \{x \in [a, b] : [a, x] \text{ es cubierto por una colección finita de intervalos } I_n\}$

El conjunto A es distinto del vacío ya que $a \in A$. Además, está acotado por b. Por lo tanto, A tiene un supremo que llamaremos s.

Como $a \in A$ y b es cota superior de A se tiene $a \leq s \leq b$.

Como $s \in [a, b]$, hay un intervalo $I_k = (a_k, b_k)$ al cual pertenece s. Siendo s el supremo de A, existe $x \in A$ tal que $x \in (a_k, s]$. Como $x \in A$, hay una colección finita de intervalos I_n cuya unión cubre al intervalo $[a, x]$. Entonces agregándole a esa familia el intervalo I_k, obtenemos una colección finita de intervalos I_n cuya unión cubre al intervalo $[a, s]$; así que $s \in A$.

Sea $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$ una colección finita de intervalos I_n cuya unión cubre el intervalo $[a, s]$ y sea $I_{n_j} = \left(a_{n_j}, b_{n_j}\right)$ uno de esos intervalos al cual pertenece s. Si se tuviera $s < b$, entonces el intervalo $[s, c) = \left[s, b_{n_j}\right) \cap [s, b)$ sería distinto del vacío. Tomando cualquier $y \in (s, c)$ se tendría $s < y < b_{n_j}$, así que la unión de los intervalos $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$ también cubriría al intervalo $[a, y]$. Como $(s, c) \subset [a, b]$, se tendría $y \in [a, b]$ y, por lo tanto, $y \in A$, lo cual no es posible ya que $s < y$ y s es el supremo de A. Por lo tanto, se tiene $s = b$. Así que la unión de los intervalos $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_m}$ cubre al intervalo $[a, b]$.

Años más tarde, se encontraría un resultado más general, al cual ahora se le conoce como teorema de Heine-Borel. Su demostración se encuentra un poco más adelante en esta sección.

Definición 1. *Diremos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ está acotado si existe una bola abierta tal que A está contenido en ella.*

Definición 2. *Llamaremos celda de $\mathbb{R}^n$ a un conjunto de la forma $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2], \cdots, I_n = [a_n, b_n]$ son intervalos cerrados y acotados de números reales tales que, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_j < b_j$.*

Definición 3. *Si $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de celdas de $\mathbb{R}^n$, diremos que éstas están anidadas si $C_{k+1} \subset C_k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.*

Proposición 1. *Sea $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de celdas anidadas de $\mathbb{R}^n$, entonces $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$.*

Demostración

Sea $I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$ la celda C_m; entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, los intervalos $I_j^{(1)}$, $I_j^{(2)}$, $I_j^{(3)}$, ... forman una sucesión anidada de intervalos cerrados y acotados; por lo tanto, existe un número real x_j en la intersección de todos ellos. Evidentemente, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, el vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ perternece a la celda C_m.

■

Proposición 2 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Si K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, cerrado y acotado, entonces, para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, existe un subconjunto U de Γ, finito, tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.*

Demostración

Sea $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ y denotemos por $\mathbb{U}$ a la familia de todos los subconjuntos finitos Γ.

Supongamos que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.

Como K es acotado, existe una celda $I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}$ que lo contiene, a la cual llamaremos C_1. Podemos tomarla de tal forma que los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tengan la misma longitud, la cual denotaremos por L.

Vamos a construir, inductivamente, una sucesión $(C_m)_{m\in\{2,3,\ldots\}}$ de celdas tales que, para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$:

i) $C_m \subset C_{m-1}$.

ii) $K \cap C_m \neq \emptyset$ y no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_m \subset \bigcup_{u\in U} G_u$.

iii) Si $C_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$, entonces, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $l\left(I_j^{(m)}\right) = \frac{1}{2^{(m-2)}} L$.

Definiendo $C_2 = C_1$, C_2 cumple con las condiciones i ii y iii.

Tomemos ahora $k \in \{2, 3, \ldots\}$ y supongamos que tenemos definida una celda $C_k = \left[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right] \times \left[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(k)}, b_n^{(k)}\right]$ satisfaciendo las propiedades i ii y iii.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotemos por $c_j^{(k)}$ al punto medio del intervalo $\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. De esta forma, en cada coordenada j tenemos los intervalos $\left[a_j^{(k)}, c_j^{(k)}\right]$ y $\left[c_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. Tomando en cada coordenada uno de esos dos intervalos y considerando el producto cartesiano de ellos, formamos una celda. El total de celdas que podemos formar de esa manera es igual a 2^n y si $C = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ es cualquiera de esas celdas, se tiene $C \subset C_k$ y, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$$l\left(I_j\right) = \tfrac{1}{2} l\left(\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]\right) = \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2^{(k-2)}} L = \tfrac{1}{2^{(k-1)}} L$$

Sabemos que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_k \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, así que, por lo menos para una de las 2^n celdas que formamos, llamémosla C, se tiene que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, porque si para cualquiera de las 2^n celdas se tuviera la propiedad contraria, existiría un conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_k \subset \bigcup_{u \in U} G_u$. Para esa celda C se tiene $K \cap C \neq \emptyset$ ya que de otra forma se tendría $K \cap C \subset G_\gamma$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, lo cual contradice la propiedad con la que elegimos a C.

Definamos entonces C_{k+1} como una cualquiera de esas celdas C, entre las 2^n celdas que formamos, con la propiedad de que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.

La celda C_{k+1} así definida satisface entonces las propiedades i, ii y iii.

Así que, por el principio de inducción matemática, para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, queda definida cada una de las celdas C_m satisfaciendo las propiedades i, ii y iii.

Denotemos por $L^{(m)}$ a la longitud común, igual a $\frac{1}{2^{(m-2)}} L$, de cada uno de los intervalos $I_j^{(m)}$ que componen la celda C_m.

Por la propiedad i, las celdas de la sucesión $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ que hemos construido están anidadas, así que $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$. Esta intersección es un conjunto formado por un único punto, ya que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertenecen a esa intersección, entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, x_j y y_j pertenecen al intervalo $I_j^{(m)}$ cuya longitud es igual a $L^{(m)}$; así que $|y_j - x_j| \leq L^{(m)} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L$ para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$ y, entonces, $x_j = y_j$.

Sea $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ el único punto en la intersección $\cap_{m=1}^{\infty} C_m$.

Para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, tomemos un elemento $z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right) \in K \cap C_m$, entonces tanto z como $z^{(m)}$ pertenecen a la celda C_m, así que, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$\left| z_j^{(m)} - z_j \right| \leq L^{(m)}$

Por lo tanto:

$$d\left(z^{(m)}, z\right) = \sqrt{\left(z_1^{(m)} - z_1\right)^2 + \left(z_2^{(m)} - z_2\right)^2 + \cdots + \left(z_n^{(m)} - z_n\right)^2}$$

$$\leq L^{(m)} \sqrt{n} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L \sqrt{n}$$

Así que la sucesión $\left(z^{(m)}\right)_{m \in \{2,3,\ldots\}}$ converge a z.

Además, $z^{(m)} \in K$ para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, así que, como K es cerrado, $z = \lim_{m \to \infty} z^{(m)} \in K$.

Por hipótesis, $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, así que, teniendo $z \in K$, existe algún conjunto G_{γ_0} tal que $z \in G_{\gamma_0}$. Siendo G_{γ_0} un conjunto abierto, existe una bola abierta, $B_r(z)$, con centro z y un radio positivo r tal que $B_r(z) \subset G_{\gamma_0}$.

Por otra parte, como z es el centro de la bola $B_r(z)$, tomando $h = \frac{r}{2\sqrt{n}}$, la celda $[z_1 - h, z_1 + h] \times [z_2 - h, z_2 + h] \times \cdots \times [z_n - h, z_n + h]$ está contenida en $B_r(z)$. En efecto, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [z_1 - h, z_1 + h] \times [z_2 - h, z_2 + h] \times \cdots \times [z_n - h, z_n + h]$, entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene $|x_j - z_j| \leq h$, así que:

$$d(x, z) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2} \leq h\sqrt{n} = \frac{r}{2}$$

Tomemos $m_0 \in \{2, 3, \ldots\}$ tal que $L^{(m_0)} = \frac{1}{2^{(m-2)}} L < h$, entonces, como $z \in C_{m_0} = \left[a_1^{(m)}, b_1^{(m)}\right] \times \left[a_2^{(m)}, b_2^{(m)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(m)}, b_n^{(m)}\right]$, si $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es cualquier elemento de C_{m_0} se tiene, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$|y_j - z_j| \leq L^{(m_0)}$

Así que:

$$d(y, z) = \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + \cdots + (y_n - z_n)^2} \leq L^{(m_0)} \sqrt{n} < h\sqrt{n} = \frac{r}{2}$$

Por lo tanto, la celda C_{m_0} está contenida en la bola $B_r(z)$, la cual a su vez está contenida en G_{γ_0}. En particular, se tiene $K \cap C_{m_0} \subset G_{\gamma_0}$.

Hemos llegado a una contradicción ya que construimos la sucesión $(C_m)_{m \in \{2,3,\ldots\}}$ de tal forma que, para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \cap C_m \subset \bigcup_{u \in U} G_u$.

Por lo tanto, la hipótesis de la que partimos, a saber, que no existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u \in U} G_u$, es falsa.

Así que existe algún conjunto $U \in \mathbb{U}$ tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$, lo cual prueba el resultado.

■

Si un conjunto K no es cerrado y acotado entonces no tiene la propiedad que se enuncia en el teorema de Heine-Borel; en otras palabras existe una cubierta de K de la cual no se puede extraer una subcubierta finita. Por ejemplo:

1. Si, en $\mathbb{R}$, tomamos K como el intervalo abierto y acotado (a,b), con $a<b$, la familia de intervalos abiertos $\left\{\left(a, b-\frac{b-a}{n}\right) : n \in \{2,3,\ldots\}\right\}$ forman una cubierta de K, de la cual no se puede extraer una subcubierta finita.

2. Si, en $\mathbb{R}$, tomamos K como el intervalo no acotado $[a,\infty)$, la familia de intervalos abiertos $\{(a,a+n) : n \in \mathbb{N}\}$ forman una cubierta de K, de la cual no se puede extraer una subcubierta finita.

Proposición 3. *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que, para cualquier familia $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, existe un subconjunto U de Γ, finito, tal que $K \subset \bigcup_{u\in U} G_u$, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración

Tomemos un elemento cualquiera $z \in \mathbb{R}^n$. La familia de bolas abiertas $\{B_m(z) : m \in \mathbb{N}\}$ forman una cubierta de K, así que existe un subconjunto finito U de números naturales tales que $K \subset \bigcup_{m\in U} B_m(z)$. Si $m_0 = \text{máx}\, U$, entonces $\bigcup_{m\in U} B_m(z) = B_{m_0}(z)$, así que $K \subset B_{m_0}(z)$ y, por lo tanto, está acotado.

Para demostar que K es cerrado, tomemos un elemento cualquiera $y \in K^c$ y para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por G_m al complemento de la bola cerrada $\overline{B}_{\frac{1}{m}}(y)$, de centro y y radio $\frac{1}{m}$. Se tiene entonces:

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B}^c_{\frac{1}{m}}(y) = \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{B}_{\frac{1}{m}}(y)\right)^c = (\{y\})^c = \mathbb{R}^n - \{y\}$$

Así que, como $y \notin K$, entonces $K \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} G_m$.

Como los conjuntos G_m son abiertos, existe un subconjunto finito U de números naturales tales que $K \subset \bigcup_{m\in U} G_m$. Si $m_0 = \text{máx}\, U$, entonces $\bigcup_{m\in U} G_m = G_{m_0}$, así que $K \subset G_{m_0}$. Por lo tanto, $B_{\frac{1}{m_0}}(y) \subset \overline{B}_{\frac{1}{m_0}}(y) = G^c_{m_0} \subset K^c$.

Así que, dado $y \in K^c$, existe una bola abierta de centro y, contenida en K^c; es decir, todos los puntos de K^c son interiores a K^c, así que K^c es cerrado y, por lo tanto, K es cerrado.

■

La propiedad enunciada en el teorema de Heine Borel no es la única que tienen los subconjuntos cerrados y acotados de R^n, que no las tiene otro tipo de conjuntos.

Proposición 4. *Si K es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, cerrado y acotado, entonces, para cualquier sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de K, existe una subsucesión que converge a algún elemento $x \in K$.*

Demostración

La demostración que haremos es similar a la del teorema de Heine Borel.

Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera de elementos de K,

Como K es acotado, existe una celda $I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}$ que lo contiene, a la cual llamaremos C_1. Podemos tomarla de tal forma que los intervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tengan la misma longitud, la cual denotaremos por L.

Vamos a construir, inductivamente, una sucesión $(C_m)_{m\in\{2,3,\ldots\}}$ de celdas tales que, para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$:

i) $C_m \subset C_{m-1}$.

ii) C_m contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

iii) Si $C_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$, entonces, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $l\left(I_j^{(m)}\right) = \frac{1}{2^{(m-2)}} L$.

Definiendo $C_2 = C_1$, C_2 cumple con las condiciones i ii y iii.

Tomemos ahora $k \in \{2, 3, \ldots\}$ y supongamos que tenemos definida una celda $C_k = \left[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right] \times \left[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}\right] \times \cdots \times \left[a_n^{(k)}, b_n^{(k)}\right]$ satisfaciendo las propiedades i ii y iii.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotemos por $c_j^{(k)}$ al punto medio del intervalo $\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. De esta forma, en cada coordenada j tenemos los intervalos $\left[a_j^{(k)}, c_j^{(k)}\right]$ y $\left[c_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]$. Tomando en cada coordenada uno de esos dos intervalos y considerando el producto cartesiano de ellos, formamos una celda. El total de celdas que podemos formar de esa manera es igual a 2^n y si $C = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ es cualquiera de esas celdas, se tiene $C \subset C_k$ y, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$l(I_j) = \frac{1}{2} l\left(\left[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}\right]\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{(k-2)}} L = \frac{1}{2^{(k-1)}} L$

Sabemos que C_k contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, así que, por lo menos una de las 2^n celdas que formamos, llamémosla C, contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, porque si para cualquiera de las 2^n celdas se tuviera la propiedad contraria, C_k contendría únicamente un número finito de elementos de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Definamos entonces C_{k+1} como una cualquiera de esas celdas C, entre las 2^n celdas que formamos, con la propiedad de que contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

La celda C_{k+1} así definida satisface entonces las propiedades i, ii y iii.

Así que, por el principio de inducción matemática, para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, queda definida cada una de las celdas C_m satisfaciendo las propiedades i, ii y iii.

Para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, denotemos por $L^{(m)}$ a la longitud común, igual a $\frac{1}{2^{(m-2)}}L$, de cada uno de los intervalos $I_j^{(m)}$ que componen la celda C_m.

Por la propiedad i, las celdas de la sucesión $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que hemos construido están anidadas, así que $\cap_{m=1}^{\infty} C_m \neq \emptyset$. Esta intersección es un conjunto formado por un único punto, ya que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertenecen a esa intersección, entonces, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$, x_j y y_j pertenecen al intervalo $I_j^{(m)}$ cuya longitud es igual a $L^{(m)}$; así que $|y_j - x_j| \leq L^{(m)} = \frac{1}{2^{(m-2)}}L$ para cualquier $m \in \{2, 3, \ldots\}$ y, entonces, $x_j = y_j$.

Sea $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ el único punto en la intersección $\cap_{m=1}^{\infty} C_m$.

Tomemos cualquier elemento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $x_{i_1} = \left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_1)}, \ldots, x_n^{(i_1)}\right)$. Como, para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, C_m contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, podemos elegir, para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, un elemento $x_{i_m} = \left(x_1^{(i_m)}, x_2^{(i_m)}, \ldots, x_n^{(i_m)}\right)$ de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $x_{i_m} \in C_m$ y $i_m > i_{m-1}$. De esta forma, la sucesión $(x_{i_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Para cada $m \in \{2, 3, \ldots\}$, tanto z como x_{i_m} pertenecen a la celda C_m, así que, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$$\left|x_j^{(i_m)} - z_j\right| \leq L^{(m)}$$

Por lo tanto:

$$d\left(x_{i_m}, z\right) = \sqrt{\left(x_1^{(i_m)} - z_1\right)^2 + \left(x_2^{(i_m)} - z_2\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(i_m)} - z_n\right)^2}$$

$$\leq L^{(m)}\sqrt{n} = \frac{1}{2^{(m-2)}}L\sqrt{n}$$

Así que la sucesión $(x_{i_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a z.

Además, $x_{i_m} \in K$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, así que, como K es cerrado, $z = \lim_{m\to\infty} x_{i_m} \in K$.

Por lo tanto, hemos encontrado una subsucesión de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la cual converge a algún elemento de K, lo cual prueba el resultado.

■

Proposición 5. *Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que, para cualquier sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de K, existe una subsucesión que converge a algún elemento $x \in K$, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración

Si K no fuera acotado, dada cualquier bola abierta $B_r(x)$, de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r \in (0,\infty)$, existiría algún elemento de K que no pertenecería a esa bola.

Suponiendo entonces que K no es acotado, definamos, inductivamente, una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de K y una sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos tales que :

i) $x_i \in K - B_{r_i}\left(\overline{0}\right)$

i) $r_i = d\left(x_{i-1}, \overline{0}\right) + 1$

donde tomamos $x_0 = \overline{0}$.

Definamos $r_1 = 1$ y x_1 como cualquiera de los elementos de K que no pertenecen a la bola $B_{r_1}\left(\overline{0}\right)$. Obviamente, x_1 y r_1 satisfacen las propiedades i y ii.

Tomemos ahora $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que tenemos definidos x_k y r_k satisfaciendo las propiedades i y ii.

Definamos $r_{k+1} = d\left(x_k, \overline{0}\right) + 1$ y x_{k+1} como cualquiera de los elementos de K que no pertenecen a la bola $B_{r_{k+1}}\left(\overline{0}\right)$. Obviamente, x_{k+1} y r_{k+1} satisfacen las propiedades i y ii.

Así que, por el principio de inducción matemática, quedan definidas las sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo las propiedades i y ii.

Para cualquier $j \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$d\left(x_{j+1}, \overline{0}\right) \geq r_{j+1} = d\left(x_j, \overline{0}\right) + 1$$

Así que, si x_j y x_{j+k} son dos elementos cualesquiera de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde j y k son números naturales, se tiene:

$$d\left(x_{j+k}, \overline{0}\right) \geq d\left(x_{j+k-1}, \overline{0}\right) + 1 \geq d\left(x_{j+k-2}, \overline{0}\right) + 2 \geq \cdots \geq d\left(x_j, \overline{0}\right) + k$$

Además:

$$d\left(x_{j+k}, \overline{0}\right) \leq d\left(x_{j+k}, x_j\right) + d\left(x_j, \overline{0}\right)$$

Así que:

$$d\left(x_{j+k}, x_j\right) \geq d\left(x_{j+k}, \overline{0}\right) - d\left(x_j, \overline{0}\right) \geq d\left(x_j, \overline{0}\right) + k - d\left(x_j, \overline{0}\right) = k$$

Por lo tanto, la distancia entre dos elementos cualesquiera de la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es mayor o igual a 1, así que no existe alguna subsucesión convergente de esa sucesión.

Por otra parte, si K no tiene puntos de acumulación, entonces es cerrado.

Si el conjunto de puntos de acumulación de K es no vacío, sea x cualquiera de esos puntos, entonces existe una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de K que converge a x; por lo tanto cualquier subsucesión de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge también a x. Pero, por la hipótesis de la proposición, existe una subsucesión de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a algún elemento que pertenece a K; por lo tanto $x \in K$. Así que, también en este caso, K es un conjunto cerrado.

■

Los resultados de esta sección muestran que los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son cerrados y acotados tienen propiedades interesantes que no las tienen los conjuntos que no lo son.

En el caso de cualquier espacio métrico, no siempre los conjuntos cerrados y acotados tienen las propiedades que demostramos antes en el caso de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo consideremos el conjunto $\mathbf{F} = \{f : [c,d] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$, donde c y d son dos números reales tales que $c < d$; si $f \in \mathbf{F}$, definamos $\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ y si $f, g \in \mathbf{F}$, definamos $d_s(f,g) = \|g - f\|_s$. Sabemos que $(\mathbf{F}, d_s)$ es un espacio métrico (completo).

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos distintos en $[c,d]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : [c,d] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene $\|f_n\|_s = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $d_s(f_n, f_m) = 1$ para cualquier pareja de números naturales, m y n, tales que $n \neq m$.

Evidentemente, el conjunto $K = \{f_1, f_2, \ldots\}$ es acotado.

Además, K no tiene puntos de acumulación. En efecto, ninguna de las funciones f_n puede ser punto de acumulación de K, ya que, dada cualquiera de ellas, la bola con centro en esa función y radio $\frac{1}{2}$ no contiene alguna otra función en K. Ahora, si una función f en $\mathbf{F}$, que no pertenece a K, fuera punto de acumulación de K, entonces existirían dos funciones f_{n_1} y f_{n_2} en K tales que:

$$0 < d_s(f_{n_1}, f) < \tfrac{1}{4}$$

$$0 < d_s(f_{n_2}, f) < d_s(f_{n_1}, f)$$

Por la última desigualdad, se tendría $f_{n_1} \neq f_{n_2}$, así que $d_s(f_{n_1}, f_{n_2}) = 1$.

Por otra parte, se tendría:

$$d_s(f_{n_1}, f_{n_2}) \leq d_s(f_{n_1}, f) + d_s(f, f_{n_2}) < 2d_s(f_{n_1}, f) < \tfrac{1}{2}$$

llegando así a una contradicción.

Siendo vacío el conjunto de puntos de acumulación de K, podemos concluir que K es cerrado.

Tenemos entonces que el conjunto K es cerrado y acotado.

Ahora bien, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la bola abierta de radio $\frac{1}{4}$ y centro f_n. La unión de esas bolas contiene a K, pero la unión de cualquier colección finita de esas bolas únicamente contiene un número finito de elementos de K, a saber, los centros de ellas.

Por otra parte, como el conjunto de puntos de acumulación de K es vacío, no existe alguna subsucesión convergente de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ya que si existiera alguna, su límite sería punto de acumulación de K.

Vemos entonces, con este ejemplo, que las propiedades que tienen los conjuntos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ no necesariamente las tienen los conjuntos cerrados y acotados de cualquier espacio métrico. Veremos en la siguiente sección que, en cualquier espacio métrico, son los conjuntos que denominaremos compactos los que tienen las propiedades interesantes que demostramos antes para los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$. Con la definición de conjunto compacto que daremos, el teorema de Heine Borel puede formularse diciendo que, en $\mathbb{R}^n$, un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

2. Conjuntos compactos, numerablemente compactos y secuencialmente compactos

En toda esta sección y la siguiente, (X, d) es un espacio métrico dado.

Definición 4. *Diremos que $K \subset X$ es compacto si para cualquier familia infinita $\{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, existe un conjunto finito $T \subset \Gamma$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma\in T} G_\gamma$.*

Definición 5. *Diremos que $K \subset X$ es numerablemente compacto si para cualquier familia $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, existe un conjunto finito $T \subset \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{n\in T} G_n$.*

Definición 6. *Diremos que $K \subset X$ es secuencialmente compacto si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K existe una subsucesión que converge a algún elemento de K.*

Definición 7. *Diremos que una familia de subconjuntos de X, $\{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, tiene la propiedad de la intersección finita si dado cualquier subconjunto finito $T \subset \Gamma$, se tiene $\bigcap_{\gamma\in T} F_\gamma \neq \emptyset$.*

Definición 8. *Diremos que $A \subset X$ es acotado si existe una bola abierta que lo contiene.*

Definición 9. *Diremos que $A \subset X$ es totalmente acotado si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito de bolas cerradas de radio ε cuya unión cubre A.*

Obviamente, todo conjunto totalmente acotado es acotado, sin embargo, el inverso no siempre es verdadero. Por ejemplo, consideremos nuevamente el conjunto $\mathbf{F} = \{f : [c, d] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$, donde c y d son dos números reales tales que $c < d$; y tomemos en $\mathbf{F}$ la norma de la convergencia uniforme $\|\|_s$.

Consideremos el subconjunto de $\mathbf{F}$ formado por las funciones f_n ($n \in \mathbb{N}$) tales que el conjunto $K = \{f_1, f_2, \ldots\}$ es cerrado y acotado pero no compacto.

El conjunto K no es totalmente acotado; en efecto, como $\|f_n\|_s = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $d_s(f_n, f_m) = 1$ para cualquier pareja de números naturales, m y n, tales que $n \neq m$, entonces para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, cualquier bola cerrada de radio ε contiene a lo más un elemento de K, ya que si f y g pertenecen a esa bola y h es su centro, entonces:

$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g) \leq \frac{1}{2}$

Por lo tanto, no existe un conjunto finito de bolas cerradas de radio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ cuya unión cubra K.

En $\mathbb{R}^n$, si un subconjunto A es acotado, entonces es totalmente acotado. En efecto, siendo A acotado existe una bola abierta B que lo contiene; por lo tanto, la bola cerrada $\overline{B}$ también lo contiene. Ahora bien, siendo la bola cerrada un conjunto compacto, es totalmente acotado; de manera que entonces A también es totalmente acotado.

La demostración de la proposición 3 no utiliza propiedades particulares de $\mathbb{R}^n$ y se aplica tanto a los conjuntos compactos como a los numerablemente compactos; así que se tienen los siguientes resultados:

Proposición 6. *Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces es cerrado y acotado.*

Proposición 7. *Si $K \subset X$ es un conjunto numerablemente compacto, entonces es cerrado y acotado.*

De la misma manera, La demostración de la proposición 5 no utiliza propiedades particulares de $\mathbb{R}^n$, así que se tiene el siguiente resultado:

Proposición 8. *Si $K \subset X$ es un conjunto secuencialmente compacto, entonces es cerrado y acotado.*

Proposición 9. *Sea $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos numerablemente compactos con la propiedad de la intersección finita, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

Demostración

Supongamos $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = X$. Así que $K_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c$ para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitraria, entonces, como K_{n_0} es compacto, existen $n_1 \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $K_{n_0} \subset \bigcup_{k=1}^{m} K_{n_k}^c$. Entonces $\bigcap_{k=0}^{m} K_{n_k} = K_{n_0} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} K_{n_k}^c\right)^c = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

■

Proposición 10. *Sea $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de subconjuntos compactos con la propiedad de la intersección finita, entonces $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma \neq \emptyset$.*

Demostración

Supongamos $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma = \emptyset$, entonces $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma^c = X$. Así que $K_{\gamma_0} \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma^c$ para cualquier $\gamma_0 \in \Gamma$. Sea $\gamma_0 \in \Gamma$ arbitraria, entonces, como K_{γ_0} es compacto, existen $\gamma_1 \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $K_{\gamma_0} \subset \bigcup_{k=1}^n K_{\gamma_k}^c$. Entonces $\bigcap_{k=0}^n K_{\gamma_k} = K_{\gamma_0} \cap \left(\bigcup_{k=1}^n K_{\gamma_k}^c\right)^c = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

■

Proposición 11. *Sea $K \subset X$ cerrado. Supongamos que cualquier familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía. Entonces K es compacto.*

Demostración

Sea $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de subconjuntos abiertos tales que $K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$ y S la familia de los subconjuntos finitos de Γ.

Para cada $T \in S$, definamos $E_T = \bigcup_{\gamma\in T} G_\gamma$.

Si $K \cap E_T^c \neq \emptyset$ para cualquier $T \in S$, entonces la familia de conjuntos cerrados $\{K \cap E_T^c\}_{T\in S,}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $K \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma\right)^c = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} (K \cap E_T^c) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $K \cap E_T^c = \emptyset$ para algún $T \in S$, así que $K \subset \bigcup_{\gamma\in T} G_\gamma$ para algún $T \in S$.

Así que K es compacto.

■

Proposición 12. *Sea $K \subset X$ cerrado. Supongamos que cualquier familia numerable de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía. Entonces K es numerablemente compacto.*

Demostración

Sea $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos abiertos tales que $K \subset \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $E_n = \bigcup_{k=1}^n G_k$.

Si $K \cap E_n^c \neq \emptyset$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces la familia de conjuntos cerrados $\{K \cap E_n^c\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $K \cap (\bigcup_{n=1}^\infty G_n)^c = \bigcap_{n=1}^\infty (K \cap E_n^c) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $K \cap E_n^c = \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, así que $K \subset \bigcup_{k=1}^n G_k$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Así que K es numerablemente compacto.

■

Corolario 1. *Un conjunto cerrado $K \subset X$ es compacto si y sólo si cualquier familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía.*

Corolario 2. *Un conjunto cerrado $K \subset X$ es numerablemente compacto si y sólo si cualquier familia numerable de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita tiene una intersección no vacía.*

Teorema 1. *Un conjunto $K \subset X$ es secuencialmente compacto si y sólo si es numerablemente compacto.*

Demostración

Supongamos que K es secuencialmente compacto y sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $H_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$ y tomemos $x_n \in H_n$.

Obsérvese que, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_j$ para cualquier $n \geq j$.

Como K es secuencialmente compacto, existe una subsucesión convergente, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Si $j \in \mathbb{N}$ y $k \geq j$, entonces $n_k \geq j$, así que $x_{n_k} \in F_j$. Por lo tanto, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Así que K es numerablemente compacto.

Inversamente, supongamos que K es numerablemente compacto y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de K.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $C_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Entonces, la familia de conjuntos cerrados $\left\{\overline{C_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in C_n$ tal que $d(x_m, x) < \frac{1}{n}$. Podemos definir entonces inductivamente una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Así que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Por lo tanto, K es secuencialmente compacto.

■

Proposición 13. *Sea $K \subset X$ un conjunto secuencialmente compacto. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $T \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in T} B_\varepsilon(x)$.*

Demostración

Supongamos que para alguna $\varepsilon > 0$ se tiene que $K \cap \left(\bigcup_{x\in T} B_\varepsilon(x)\right)^c \neq \emptyset$ para cualquier conjunto finito $T \subset K$. Sea $x_1 \in K$ arbitrario y definamos inductivamente una sucesión

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $x_{k+1} \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{\varepsilon}^{c}(x_j)$, es decir, $d(x_{k+1}, x_j) \geq \varepsilon$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$. Se tiene entonces $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ distintas. Así que no existe ninguna subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lo cual es una contradicción ya que K es secuencialmente compacto.

■

Corolario 3. *Si $K \subset X$ es un conjunto secuencialmente compacto, entonces es totalmente acotado.*

Corolario 4. *Sea $K \subset X$ un conjunto secuencialmente compacto. Entonces K contiene un subconjunto denso numerable.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea T_n un subconjunto finito de K tal que $K \subset \bigcup_{x\in T_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$. Definamos $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$.

Si $x \in K$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in T_n \subset T \subset K$ tal que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Así que $x \in \overline{T}$, es decir, $K = \overline{T}$.

■

Proposición 14. *Si $A \subset X$ es totalmente acotado y $H = \{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X cuya unión cubre A, entonces existe una colección numerable de conjuntos $G\gamma \in H$ cuya unión sigue cubriendo A.*

Demostración

Si A es vacío el resultado es trivial; así que asumiremos que $A \neq \emptyset$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea B_n un subconjunto finito de X tal que la unión de las bolas cerradas de centro cada uno de los puntos de B_n y radio $\frac{1}{n}$ cubre A y sea $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Definamos:

$$M = \left\{(n, y) : n \in \mathbb{N},\ y \in B_n \text{ y existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \overline{B}_{\frac{1}{n}}(y) \subset G_\gamma\right\}$$

Como $A \subset \bigcup_{\gamma\in T} G_\gamma$, dado $x \in A$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $x \in G_\gamma$. Siendo G_γ abierto, existe una bola $B_r(x)$ contenida en G_γ. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$.

Como $A \subset \bigcup_{y\in B_n} \overline{B}_{\frac{1}{n}}(y)$, existe $y \in B_n$ tal que $x \in \bar{B}_{\frac{1}{n}}(y)$. Entonces, si $z \in \overline{B}_{\frac{1}{n}}(y)$, se tiene:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < r$$

Así que $z \in B_r(x)$; por lo tanto:

$$\overline{B}_{\frac{1}{n}}(y) \subset B_r(x) \subset G_\gamma$$

Hemos demostrado entonces que, dado $x \in A$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y \in B_n$ tales que $(n, y) \in M$ y $x \in \bar{B}_{\frac{1}{n}}(y)$.

En particular, lo anterior demuestra que el conjunto M es no vacío y, obviamente, es un conjunto numerable.

Denotemos por (r_1, s_1), (r_2, s_2), $\ldots$ los elementos de M.

Para cada $(r_k, s_k) \in M$, tomemos un elemento $\gamma \in \Gamma$ tal que $\bar{B}_{\frac{1}{r_k}}(s_k) \subset G_\gamma$ y denotemos ese elemento por γ_k.

Con esta notación, podemos enunciar el resultado anterior de la siguiente manera:

Para cada $x \in A$, existe un elemento (r_k, s_k) tal que $x \in \bar{B}_{\frac{1}{r_k}}(s_k) \subset G_{\gamma_k}$.

Por lo tanto, $A \subset \bigcup_k G_{\gamma_k}$, lo cual demuestra el resultado

■

Corolario 5. *Un conjunto $K \subset X$ es secuencialmente compacto si y sólo si es compacto.*

Demostración

Si K es compacto, entonces es numerablemente compacto, así que, por el teorema 1, es secuencialmente compacto.

Inversamente, si K es secuencialmente compacto, entonces, por el teorema 1, es numerablemente compacto. Además, por el corolario 3, también es totalmente acotado, así que, por la proposición 14, si $H = \{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X cuya unión cubre A, entonces existe un conjunto numerable $\Psi \subset \Gamma$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma \in \Psi} G_\gamma$. Por lo tanto, siendo K numerablemente compacto, existe un conjunto finito $T \subset \Psi$ tal que $K \subset \bigcup_{\gamma \in T} G_n$. Lo cual demuestra que K es compacto.

Corolario 6. *Si K es un subconjunto de X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) K es compacto.

ii) K es numerablemente compacto.

iii) K es secuencialmente compacto.

3. Caracterización de los conjuntos compactos

Definición 10. *Diremos que $A \subset X$ es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

Por la proposición 6, el corolario 5 y el corolario 3, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 15. *Si $K \subset X$ es un conjunto compacto, entonces es cerrado y totalmente acotado.*

Proposición 16. *Un conjunto $B \subset X$ es totalmente acotado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración

Supongamos que B es totalmente acotado y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de B.

Tomemos un conjunto finito $T_1 \subset X$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in T_1} B_1(x)$. Siendo T_1 finito, por lo menos una de las bolas $B_1(x)$, con $x \in T_1$, contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $B_1(x_1)$ una de esas bolas.

Tomemos ahora un conjunto finito $T_2 \subset X$ tal que $K \subset \bigcup_{x\in T_2} B_{\frac{1}{2}}(x)$. Siendo T_2 finito, por lo menos una de las bolas $B_{\frac{1}{2}}(x)$, con $x \in T_2$, es tal que $B_1(x_1) \cap B_{\frac{1}{2}}(x)$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $B_{\frac{1}{2}}(x_2)$ una de esas bolas.

Mediante ese proceso podemos definir inductivamente una sucesión de bolas $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\bigcap_{k=1}^{n} B_{\frac{1}{k}}(x_k)$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Tomemos $y_{n_1} \in B_1(x_1)$ y definamos inductivamente una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $y_{n_k} \in \bigcap_{j=1}^{k} B_{\frac{1}{j}}(x_j)$. Se tiene entonces $d(y_{n_k}, x_j) < \frac{1}{j}$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$; así que, fijando $j \in \mathbb{N}$, se tiene $d(y_{n_k}, x_j) < \frac{1}{j}$ para cualquier $k \geq j$.

Por lo tanto, fijando $j \in \mathbb{N}$, se tiene $d(y_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{2}{j}$ para cualesquiera $k, m \geq j$. Así que la sucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Supongamos ahora que B no es totalmente acotado. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $K \cap \left(\bigcup_{x\in T} B_\varepsilon(x)\right)^c \neq \emptyset$ para cualquier conjunto finito $T \subset X$ (en particular, para cualquier conjunto finito $T \subset K$). Sea $x_1 \in K$ arbitrario y definamos inductivamente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $x_{k+1} \in \bigcap_{j=1}^{k} B_\varepsilon^c(x_j)$, es decir, $d(x_{k+1}, x_j) \geq \varepsilon$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, k\}$. Se tiene entonces $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ distintas. Así que no existe ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sea de Cauchy.

$\blacksquare$

Proposición 17. *Un conjunto $B \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B existe una subsucesión convergente.*

Demostración

Si B es relativamente compacto, entonces $\overline{B}$ es secuencialmente compacto, así que toda sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B contiene una subsucesión convergente (a algún punto de $\overline{B}$).

Inversamente, supongamos que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B existe una subsucesión convergente y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\overline{B}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n \in B$ tal que $d(y_n, z_n) < \frac{1}{n}$. Tal z_n existe pues si $y_n \in B$ podemos tomar $z_n = y_n$ y si $y_n \notin B$ entonces y_n es punto de acumulación de B.

Sea ahora $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $z = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} z_{n_k}$. Entonces, como:

$d(y_{n_k}, z) \leq d(y_{n_k}, z_{n_k}) + d(z_{n_k}, z) < d(z_{n_k}, z) + \frac{1}{n_k}$

se tiene $z = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} y_{n_k}$.

Además, como $\overline{B}$ es cerrado, $z \in \overline{B}$.

Por lo tanto, para toda sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\overline{B}$ existe una subsucesión convergente a algún elemento de $\overline{B}$. Es decir, $\overline{B}$ es secuencialmente compacto y, por lo tanto, compacto.

■

Corolario 7. *Si X es completo, entonces un conjunto $K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración

Supongamos que K es relativamente compacto y tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquiera de elementos de K; entonces, por la proposición 17, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente y, por lo tanto, de Cauchy; así que por la proposición 16, K es totalmente acotado.

Inversamente, supongamos que K es totalmente acotado y tomemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquiera de elementos de K ; entonces, por la proposición [**?**], existe uyna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es de Cauchy. Siendo X completo, esa subsucesión es convergente; así que, por la proposición 17, K es relativamente compacto.

■

Corolario 8. *Si X es completo, entonces cualquier conjunto $K \subset X$ cerrado y totalmente acotado, es compacto.*

Demostración

Si $K \subset X$ es un conjunto cerrado y totalmente acotado, entonces, por el corolario 7, es relativamente compacto; así que $K = \overline{K}$ es compacto.

■

Por la proposición 15 y el corolario 8 se tiene entonces el siguiente resultado:

Teorema 2. *Si X es completo, un conjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado.*

Si X no es completo, es posible que haya subconjuntos cerrrados y totalmente acotados que no sean compactos. Por ejemplo, tomemos $X = \mathbb{Q}$ con la distancia usual entre números reales; entonces el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ 2 < x^2 < 3\}$ es cerrado y totalmente acotado, pero no compacto.

Definición 11. *Definimos el diámetro $diam\,(A)$, de un conjunto $A \subset X$, de la siguiente manera:*

$diam\,(A) = \sup\{d\,(x, y) : x, y \in A\}$

Teorema 3. *X es completo si y sólo si, para cualquier sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados no vacíos tales que $F_n \supset F_{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} diam\,(F_n) = 0$, se tiene $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Demostración

Supongamos que X es completo y sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos tales que $F_n \supset F_{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $x_n \in F_n$. Entonces, fijando, $j \in \mathbb{N}$, se tiene $x_n \in F_j$ para cualquier $n \geq j$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $diam\,(F_N) < \varepsilon$. Entonces, $d\,(x_n, x_m) \leq diam\,(F_N) < \varepsilon$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n, m \geq N$.

Por lo tanto, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, así que converge a algún punto $x \in X$.

Finalmente, como para cualquier $j \in \mathbb{N}$, se tiene $x_n \in F_j$ para cualquier $n \geq j$, entonces $x = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} x_n \in F_j$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$, así que $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Inversamente, supongamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ para cualquier sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados no vacíos tales que $F_n \supset F_{n+1}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} diam\,(F_n) = 0$.

Dada una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Entonces, la familia de conjuntos cerrados $\left\{\overline{C_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $\overline{C_n} \supset \overline{C_{n+1}}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} diam\left(\overline{C_n}\right) = 0$. Por lo tanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n} \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{C_n}$, entonces $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} d\,(x_n, x) \leq \lim_{n\rightsquigarrow\infty} diam\left(\overline{C_n}\right) = 0$. Por lo tanto, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

■

4. Compacidad en espacios vectoriales normados

Definición 12. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Diremos que una función $x \to \|x\|$, definida sobre X y con valores en $\mathbb{R}$, es una norma si satisface las siguientes propiedades:*

$\|x\| \geq 0$ para cualquier $x \in X$.

$\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ para cualesquiera $\alpha = F$ y $x \in X$.

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Definición 13. *Si X es un espacio vectorial en donde está definida una norma, diremos que X es un espacio vectorial normado.*

Definición 14. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ y $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de X. Si $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, definimos $\|x\|_{0,B} = \text{máx}\{|\alpha_k| : k \in \{1, \ldots, n\}\}$.*

Se prueba inmediatamente que la función $x \mapsto \|x\|_{0,B}$ es una norma sobre X.

Definición 15. *La norma $\|x\|_{0,B}$ será llamada la norma del máximo en la base B.*

Además si $\|\|$ es cualquier otra norma definida sobre X y $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, entonces:

$\|x\| = \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \, \|x_k\| \leq \|x\|_{0,B} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$

Proposición 18. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ y $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de X. Entonces X es completo con respecto a la norma $\|x\|_{0,B}$.*

Demostración

Sea $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\|_{0,B}$. Si $y_m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(m)} x_k$, entonces, como $\left|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}\right| \leq \|y_i - y_j\|_{0,B}$ para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left(\alpha_k^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy para cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $\alpha_k = \text{lím}_{m \rightsquigarrow \infty} \alpha_k^{(m)}$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, y definamos $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea N tal que $\|y_i - y_j\|_{0,B} < \varepsilon$ para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ mayores o iguales a N. Entonces, también se tiene $\left|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}\right| < \varepsilon$ para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ mayores o iguales a N y cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$. Fijando $i \geq N$, se tiene, para cualquier $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$\left|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k\right| = \text{lím}_{j \rightsquigarrow \infty} \left|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k^{(j)}\right| \leq \varepsilon$

Por lo tanto:

$\|y_i - y\|_{0,B} = \text{máx}\left\{\left|\alpha_k^{(i)} - \alpha_k\right| : k \in \{1, \ldots, n\}\right\} \leq \varepsilon$

Así que la sucesión $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge a y.

■

Proposición 19. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$, $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de X y $\|\|$ una norma definida sobre X. Entonces existe una constante positiva c tal que $\|x\| \geq c \|x\|_{0,B}$ para cualquier $x \in X$.*

Demostración

La demostración se hará por inducción sobre la dimensión de X.

Supongamos que el resultado es válido para cualquier espacio vectorial de dimensión k, cualquier base de ese espacio y cualquier norma definida sobre él.

Sea ahora Y un espacio vectorial de dimensión $k+1$, $B_Y = \{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$ una base de Y y $\|\|$ una norma definida sobre Y.

Tomemos cualquier $y_i \in B_Y$ y sea M el subespacio vectorial generado por $A = B_Y - \{y_i\}$.

Por la hipótesis de inducción, sabemos que existe una constante positiva c_M tal que $\|y\| \geq c_M \|y\|_{0,A}$ para cualquier $y \in M$.

Sea $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, en M, con respecto a la norma $\|\|$. Entonces, como $\|y\|_{0,A} \leq \frac{1}{c_M} \|y\|$ para cualquier $y \in M$, $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy con respecto a la norma $\|\|_{0,A}$. Sea z el límite de la sucesión con respecto a $\|\|_{0,A}$. Entonces, como $\|z_m - z\| \leq \|z_m - z\|_{0,A} \left(\sum_{j=1}^{k+1} \|y_j\| - \|y_i\|\right)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ también converge a z con respecto a la norma $\|\|$. Así que M es completo y, por lo tanto, es un subconjunto cerrado de X.

Como los vectores $y_1, \ldots, y_{k+1}$ son linealmente independientes, $y_i \in M^c$. Así que existe una bola abierta de radio $\delta_i > 0$ y centro y_i, completamente contenida en M^c. Por tanto, $\|y - y_i\| \geq \delta_i$ para cualquier $y \in M$.

Tomemos $y = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j y_j \in Y$.

Si $\alpha_i \neq 0$, entonces $y_i - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} y_j \in M$, así que $\left\|\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} y_j\right\| \geq \delta_i$. Por lo tanto:

$$\|y\| = \left\|\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j y_j\right\| \geq |\alpha_i| \, \delta_i$$

Obviamente también se tiene $\|y\| \geq |\alpha_i| \, \delta_i$ cuando $\alpha_i = 0$.

Definamos $c_Y = \text{mín} \{\delta_i : i \in \{1, \ldots, k+1\}\}$. Entonces $c_Y > 0$ y se tiene $\|y\| \geq |\alpha_i| \, c_Y$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Así que:

$$\|y\| \geq c_Y \, \text{máx} \{|\alpha_i| : \{\delta_i : i \in \{1, \ldots, k+1\}\}\} = c_Y \|y\|_{0,B_Y}$$

∎

Corolario 9. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ y $\|\|_1$ y $\|\|_2$ dos normas definidas sobre X. Entonces existen dos constantes positivas a y b tales que $a \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1$ para cualquier $x \in X$.*

Corolario 10. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$. Entonces X es completo con respecto a cualquier norma definida sobre él.*

Corolario 11. *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces cualquier subespacio de X de dimensión finita es cerrado.*

Demostración

Todo subespacio vectorial de dimensión finita es completo. Por lo tanto, es un subconjunto cerrado de X.

$\blacksquare$

Proposición 20. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita. Entonces todo subconjunto de X, cerrado y acotado, es secuencialmente compacto.*

Demostración

Sea $B = \{x_1, \ldots, x_m\}$ una base de X y a, b dos constantes positivas tales que $\|x\|_{0,B} \leq a \|x\|$ y $\|x\| \leq b \|x\|_{0,B}$ para cualquier $x \in X$, en donde $\|\|$ es la norma en X.

Sea $K \subset X$ un conjunto cerrado y acotado, M tal que $\|x\| \leq M$ para cualquier $x \in K$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en K.

Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ni} x_i$, entonces:

$\text{máx}\{|\alpha_{ni}| : i \in \{1, \ldots, n\}\} = \|y_n\|_{0,B} \leq a \|y_n\| \leq aM.$

Así que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la sucesión $(\alpha_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Sean $\left(\alpha_{n_k^{(1)}1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $(\alpha_{n1})_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\alpha_{n_k^{(2)}2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $\left(\alpha_{n_k^{(1)}2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, ... Obtenemos de esta forma una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, la sucesión $(\alpha_{n_k i})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\alpha_i = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \alpha_{n_k i}$ y definamos $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$. Entonces:

$\text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \|y_{n_k} - y\| \leq \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} b \|y_{n_k} - y\|_{0,B}$

$= b\, \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \text{máx}\{|\alpha_{n_k i} - \alpha_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\} = 0$

Por lo tanto, la subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Además, como K es cerrado, $y \in K$.

K es entonces secuencialmente compacto y, por lo tanto, compacto.

$\blacksquare$

Lema 1. *Sea X un espacio vectorial normado, M un subespacio vectorial cerrado, contenido propiamente en X, y $\varepsilon \in (0, 1)$ arbitraria. Entonces existe un vector $x_\varepsilon \in X$ de norma 1 y tal que $\|x_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon$ para cualquier $x \in M$.*

Demostración

Sea $y \in X - M$ y definamos:

$d = \text{ínf}\,\{\|y - x\| : x \in M\}$

d es positiva pues si d fuera igual a cero entonces existiría una sucesión de elementos de M que converge a y, así que, como M es cerrado, se tendría $y \in M$.

Ahora bien, como $d < \frac{d}{1-\varepsilon}$, existe $z \in M$ tal que $d \leq \|y - z\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$.

Definamos $x_\varepsilon = \frac{y-z}{\|y-z\|}$. Entonces $\|x_\varepsilon\| = 1$ y, si $x \in M$, se tiene:

$\|x_\varepsilon - x\| = \left\| \frac{y-z}{\|y-z\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y-z\|} \|(y - z) - \|y - z\|\, x\|$

$= \frac{1}{\|y-z\|} \|y - (z + \|y - z\|\, x)\| \geq \frac{d}{\|y-z\|} > 1 - \varepsilon$

■

Proposición 21. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión infinita. Entonces la bola cerrada de radio 1 y centro 0 no es un conjunto secuencialmente compacto.*

Demostración

Sea $x_1 \in X$ un vector arbitrario de norma 1. Utilizando el lema 1, podemos definir inductivamente una sucesión de vectores $x_n \in X$ tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| = 1$ y $\|y - x_{n+1}\| > \frac{1}{2}$ para cualquier y en el espacio vectorial generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$, el cual es cerrado por ser de dimensión finita. En particular, se tiene $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ distintos.

Supongamos que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Tal sucesión sería de Cauchy, así que existiría N tal que $\left\|x_{n_j} - x_{n_k}\right\| < \frac{1}{2}$ para cualesquiera $j, k \in \mathbb{N}$ mayores que N, lo cual es imposible.

Por lo tanto, la bola cerrada de radio 1 y centro 0 no es un conjunto secuencialmente compacto. Así que no es compacto.

■

Corolario 12. *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces X tiene dimensión finita si y sólo si todo subconjunto de X, cerrado y acotado, es secuencialmente compacto (compacto).*